

ĐÁP ÁN TOÁN CHO KỸ SƯ

(ngày thi 2/6/2025)

Câu hỏi	Nội dung	Điểm
Câu 1		2,5đ
	a) $\frac{dV}{dt} = bV(\ln a - \ln V) \Leftrightarrow \frac{dV}{V(\ln V - \ln a)} = -bdt$ Tích phân hai vế hương trình $\int \frac{dV}{V(\ln V - \ln a)} = -\int bdt + C_1 \Leftrightarrow \int \frac{(\ln V - \ln a)' dV}{(\ln V - \ln a)} = -\int bdt + C_1$ $\Leftrightarrow \ln \ln V - \ln a = -bt + C_1 \Leftrightarrow \ln V - \ln a = e^{-bt+C_1} \Leftrightarrow \ln V = \ln a + Ce^{-bt}.$ Ta có điều kiện ban đầu: $V(0) = 2 \Leftrightarrow \ln 2 = \ln a + C \Leftrightarrow C = \ln \frac{2}{a}$ Vậy $V = a \times e^{\frac{\ln 2}{a} \times e^{-bt}} \text{ (mm}^3\text{)}.$	0.5đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ
	b) Thay $T_m = e^{-t}$ vào $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$ ta được $\frac{dT}{dt} = -k(T - e^{-t}) \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + kT = ke^{-t}$ Nghiệm tổng quát phương trình $T(t) = \frac{1}{e^{\int kdt}} \left(\int ke^{-t} e^{\int kdt} dt + C \right) \Leftrightarrow T(t) = e^{-kt} \left(\int ke^{-t} e^{kt} dt + C \right)$ $\Leftrightarrow T(t) = e^{-kt} \left(\int ke^{(k-1)t} dt + C \right) \Leftrightarrow T(t) = e^{-kt} \left(\frac{k}{k-1} e^{(k-1)t} + C \right)$ $\Leftrightarrow T(t) = \frac{k}{k-1} e^{-t} + Ce^{-kt} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$ Vậy nhiệt độ gần đúng của vật sau khoảng thời gian t đủ lớn xấp xỉ 0.	0.5đ 0.25đ 0.25đ
Câu 4		2,5đ
	Đặt $Y = Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được: $s^2 Y - sy(0) - y'(0) + 5(sY - y(0)) + 4Y = \mathcal{L}[e^{-3t} + \sin 20t]$ $\Leftrightarrow Y(s^2 + 5s + 4) = \frac{1}{s+3} + \frac{20}{s^2 + 400}$	0.5đ 0.25đ
	$\Leftrightarrow Y = \frac{s^2 + 20s + 460}{(s^2 + 400)(s+3)(s+1)(s+4)}$	0.25đ
	Phân tích thành phân thức đơn giản $\Leftrightarrow Y = \frac{s^2 + 20s + 460}{(s^2 + 400)(s+3)(s+1)(s+4)} \stackrel{(*)}{=} \frac{As + 20B}{s^2 + 400} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s+4}.$	

	Biến đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left[A\frac{s}{s^2+400} + B\frac{20}{s^2+400} + C\frac{1}{s+3} + D\frac{1}{s+1} + E\frac{1}{s+4}\right]$ $\Leftrightarrow y(t) = A\cos 20t + B\sin 20t + Ce^{-3t} + De^{-t} + Ee^{-4t}.$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} [Ce^{-3t} + De^{-t} + Ee^{-4t}] = 0$ nên sau khoảng thời gian t đủ lớn $y(t) \approx A\cos 20t + B\sin 20t = \sqrt{A^2+B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cos 20t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \sin 20t \right)$ Đặt $\sin \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \cos \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $y(t) \approx \sqrt{A^2+B^2} (\sin \alpha \cos 20t + \cos \alpha \sin 20t) = \sqrt{A^2+B^2} \sin(20t + \alpha)$ Vậy sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân, $y(t)$, xấp xỉ dao động điều hòa theo thời gian t có biên độ dao động $\sqrt{A^2+B^2}$ quanh điểm cân bằng có tọa độ $y_0 = 0$, tần số dao động $T = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$. Tìm A, B, C, D, E dựa vào đẳng thức: $\frac{s^2+20s+460}{(s^2+400)(s+3)(s+1)(s+4)} \stackrel{(*)}{=} \frac{As+20B}{s^2+400} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s+4}$ $C = \frac{(-3)^2+20(-3)+460}{(9+400)(-3+1)(-3+4)}; D = \frac{(-1)^2+20(-1)+460}{(1+400)(-1+3)(-1+4)}$ $E = \frac{(-4)^2+20(-4)+460}{(16+400)(-4+3)(-4+1)}.$ Từ đẳng thức (*) lần lượt cho $s=0, s=1$ lập được hệ gồm 2 phương trình rồi thế C, D, E vào hệ từ đó giải tìm A, B. * Chú ý: Có thể giải bằng phương pháp hệ số bất định hay phương pháp biến thiên hằng số.	0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ
	b) Áp dụng công thức nghiệm đã thiết lập trong quá trình học ta được nghiệm dạng $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nat + B_n \sin nat) \sin nx$ $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 3x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq 3 \\ \pi & \text{if } n = 3 \end{cases};$ $B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx = \frac{2}{n\pi a} \int_0^{\pi} a \sin nx dx = \frac{2}{n\pi} \frac{\cos nx}{n} \Big _0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} ((-1)^n - 1).$ Vậy nghiệm bài toán là	0.5đ 0.25đ 0.25đ

	$u(x,t) = 2 \sin 3at \sin 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) \sin nat \sin nx \right).$	
Câu 3		2.5đ
a)	$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m^2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -(m-1)^2(m+1); \quad D_x = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ m & 1 & m^2 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -(m-1)^2(m+1)^2$ $D_y = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & m & m^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1); \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = 0$ Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Khi ấy nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = m+1 \\ y = \frac{D_y}{D} = -1 \\ z = \frac{D_z}{D} = 0 \end{cases}$	0.5đ 0.25đ
b)	$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 5.$ * $\lambda = 2$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, (A - 2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_3 = -x_1 - x_2$ Suy ra $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{X_1}} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{X_2}} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$ * $\lambda = 5$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, (A - 5I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{X_3}} \rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$	0.5đ 0.25đ
	Vậy trị riêng và vectơ riêng của A là	

	$* \lambda = 1 \xrightarrow{\text{vec tơ riêng cơ sở}} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $* \lambda = 5 \xrightarrow{\text{vec tơ riêng cơ sở}} X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	0.25đ
Câu 4		2đ
	a) Chuỗi Fourier hàm số có dạng $f(x) = x + \sin x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin x) dx = 0 + \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}.$ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin x) \cos nx dx = 0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx$ $= \frac{1}{\pi} \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} & \text{if } n \neq 1 \end{cases}$ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \sin x) \sin nx dx = 0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$ $= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \Big _0^{\pi} = \frac{2(-1)^n}{n}.$ Vậy $\underbrace{x + \sin x }_{f(x)} = \frac{2}{\pi} - 2 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \right) \cos nx + \frac{2(-1)^n}{n} \sin nx.$ b) $z = \frac{4}{1-i\sqrt{3}} = \frac{4(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = 1+i\sqrt{3}.$ $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \theta = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$ Dạng đại số: $z = 1 + i\sqrt{3}.$ Dạng hình học: $z = (1, \sqrt{3}).$ Dạng lượng giác: $z = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}).$ Dạng mũ: $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$ Dạng kỹ thuật: $z = 2 \angle \frac{\pi}{3}.$ c) Áp dụng công thức nghiệm đã thiết lập trong quá trình học ta được nghiệm dạng $u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2 t} \cos nx$	0.5đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.25đ 0.5đ

$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 100(\pi - x) dx = 100\pi .$ $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 100(\pi - x) \cos nx dx = \frac{200}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \pi \cos nx dx - \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right)$ $= \frac{200}{\pi} \left(\frac{\pi \sin nx}{n} - \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{x \sin nx}{n} \right) \Big _0^{\pi} = \frac{200}{\pi n^2} (1 - (-1)^n)$ Vậy nghiệm bài toán là $u(x, t) = 50\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) e^{-kn^2 t} \cos nx .$	0.25đ 0.25đ
d) Giải phương trình (1): Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - k^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm k$ Hệ nghiệm cơ bản: $\{e^{kx}, e^{-kx}\}$ Nghiệm tổng quát: $\psi(x) = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$ với $C_1, C_2 = \text{const} .$ Giải phương trình (2): Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + l^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \pm il$ Hệ nghiệm cơ bản: $\{\cos lx, \sin lx\}$ Nghiệm tổng quát: $\psi(x) = C_1 \cos lx + C_2 \sin lx$ với $C_1, C_2 = \text{const} .$	0.5đ 0.5đ

.....**Hết**.....